

Тема: Основные логические элементы

Практическая работа № 1 Работа с базовыми логическими элементами

Практическая работа № 2 Работа и особенности логических элементов

ЭВМ

Цель работы: Изучить основы алгебры логики.

Время выполнения: 4 часа

Оборудование: тетрадь, ручка.

Программное обеспечение: операционная система, презентация.

Задачи практической работы

В результате прохождения занятия студент должен:

1. знать:

- определения основных понятий (простое и сложное высказывания, логические операции, логические выражения, логическая функция);
- порядок выполнения логических операций;
- алгоритм построения таблиц истинности;
- схемы базовых логических элементов;
- законы логики и правила преобразования логических выражений;

2. уметь:

- применять законы логики для упрощения логических выражений;
- строить таблицы истинности;
- строить логические схемы сложных выражений.

Теоретические основы

Основные понятия алгебры логики

Логической основой компьютера является алгебра логики, которая рассматривает логические операции над высказываниями.

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Пример. «3 – простое число» является высказыванием, поскольку оно истинно.

Не всякое предложение является логическим высказыванием.

Пример. предложение «Давайте пойдем в кино» не является высказыванием.

Вопросительные и побудительные предложения высказываниями не являются.

Высказывательная форма – это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Пример. « $x+2>5$ » - высказывательная форма, которая при $x>3$ является истинной, иначе ложной.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения – является ли оно истинным или ложным. Слова и словосочетания «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными**(сложными). Высказывания, которые не являются составными, называются **элементарными** (простыми).

Пример. высказывание «Число 6 делится на 2» - простое высказывание.

Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - составное высказывание, образованное из двух простых с помощью логической связки «и».

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний, из которых они состоят.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена.

Пример. Обозначим через А простое высказывание «число 6 делится на 2», а через В простое высказывание «число 6 делится на 3». Тогда составное

высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» можно записать как «А и В». Здесь «и» – логическая связка, А, В – логические переменные, которые могут принимать только два значения – «истина» или «ложь», обозначаемые, соответственно, «1» и «0».

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение (табл. 1).

Таблица 1. Основные логические операции

Обозначение операции	Читается	Название операции	Альтернативные обозначения
\neg	НЕ	Отрицание (инверсия)	Черта сверху
\wedge	И	Конъюнкция (логическое умножение)	&
\vee	ИЛИ	Дизъюнкция (логическое сложение)	+
\rightarrow	Если ... то	Импликация	\supset
\leftrightarrow	Тогда и только тогда	Эквиваленция	\sim
XOR	Либо ...либо	Исключающее ИЛИ (сложение по модулю 2)	\oplus

НЕ Операция, выражаемая словом «не», называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком \neg). Высказывание $\neg A$ истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно.

Пример. Пусть А=«Сегодня пасмурно», тогда $\neg A$ =«Сегодня не пасмурно».

И Операция, выражаемая связкой «и», называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio – соединение) или логическим умножением и обозначается точкой

« \bullet » (может также обозначаться знаками \wedge или $\&$). Высказывание $A \bullet B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 больше 10» - ложно.

ИЛИ Операция, выражаемая связкой «или» (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. *disjunctio* – разделение) или логическим сложением и обозначается знаком \vee

(или плюсом). Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Пример: Высказывание «Число 6 делится на 2 или число 6 больше 10» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 5 или число 6 больше 10» - ложно.

ЕСЛИ ... ТО Операция, выражаемая связками «если ..., то», «из ... следует», «... влечет ...», называется **импликацией** (лат. *implicatio* – тесно связаны) и обозначается знаком \rightarrow . Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Пример. Высказывание «если студент сдал все экзамены на «отлично», то он получит стипендию». Очевидно, эту импликацию следует признать ложной лишь в том случае, когда студент сдал на «отлично» все экзамены, но стипендии не получил. В остальных случаях, когда не все экзамены сданы на «отлично» и стипендия получена (например, в силу того, что студент проживает в малообеспеченной семье) либо когда экзамены вообще не сданы и о стипендии не может быть и речи, импликацию можно признать истинной.

РАВНОСИЛЬНО Операция, выражаемая связками «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «... равносильно ...», называется **эквиваленцией** или **двойной импликацией** и обозначается знаком \leftrightarrow или \sim . Высказывание $A \leftrightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.

Пример: Высказывание «Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Число является нечетным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» - ложно.

ЛИБО ... ЛИБО Операция, выражаемая связками «Либо ... либо», называется **исключающее ИЛИ** или **сложением по модулю 2** и обозначается XOR или \oplus . Высказывание $A \oplus B$ истинно тогда и только тогда, когда значения A и B не совпадают.

Пример. Высказывание «Число 6 либо нечетно либо делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Либо число 6 четно либо число 6 делится на 3» – ложно, так как истинны оба высказывания входящие в него.

Замечание. Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B.$$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Исключающее ИЛИ можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \text{ XOR } B = (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A).$$

Вывод. Операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками. Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания («не»), затем конъюнкция («и»), после конъюнкции – дизъюнкция («или») и исключающего или и в последнюю очередь – импликация и эквиваленция.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой (логическим выражением).

Логическая формула - это символическая запись высказывания, состоящая из логических величин (констант или переменных), объединенных логическими операциями (связками).

Логическая функция - это функция логических переменных, которая может принимать только два значения: 0 или 1. В свою очередь, сама логическая переменная (аргумент логической функции) тоже может принимать только два значения: 0 или 1.

Пример. $F(A, B) = A \& B \vee A$ – логическая функция двух переменных A и B. Значения логической функции для разных сочетаний значений входных переменных – или, как это иначе называют, наборов входных переменных – обычно задаются специальной таблицей. Такая таблица называется **таблицей истинности**.

Приведем таблицу истинности основных логических операций (табл. 2)

Таблица 2

A	B	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \text{ XOR } B$
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Опираясь на данные таблицы истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для более сложных формул.

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:

- количество строк = 2^n + строка для заголовка,
- n - количество простых высказываний.

2. Определить количество столбцов:

- количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
- определить количество переменных (простых выражений);
- определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \& B)$.

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому $n=2$ и количество строк $=2^2+1=5$.

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблица 3. Таблица истинности для логической операции

A	B	$A \& B$	$A B = \neg(A \& B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так:

$$\neg(A \vee B).$$

Таблица 4. Таблица истинности для логической операции

A	B	$A \vee B$	$A \downarrow B = \neg(A \vee B)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Примечание: И–НЕ называют также «штрих Шеффера» (обозначают $|$) или «антиконъюнкция»; ИЛИ–НЕ называют также «стрелка Пирса» (обозначают \downarrow) или «антидизъюнкция».

Пример 2. Составить таблицу истинности логического выражения $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$.

Решение:

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: A и B, поэтому $n=2$ и количество строк $=2^2+1=5$.

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (A и B) и пяти логических операций (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 7.

Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 5).

Таблица 5. Таблица истинности для логической операции

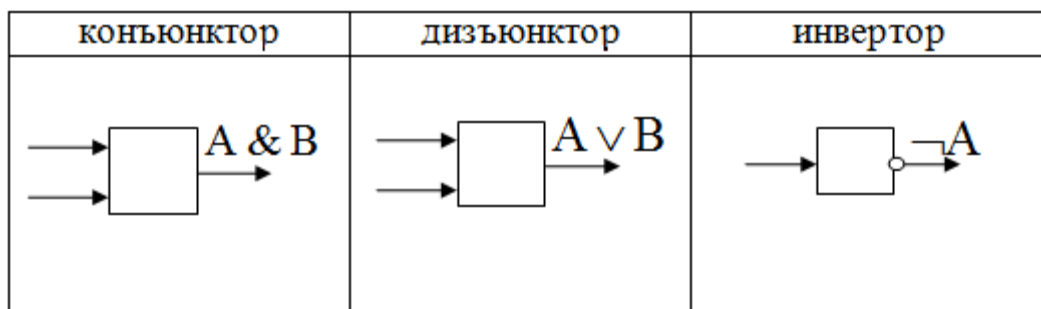
$$C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \& B$	$A \& \neg B$	C
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

Логические формулы можно также представлять с помощью языка логических схем.

Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

- логический элемент «И» – логическое умножение – конъюнктор;
- логический элемент «ИЛИ» – логическое сложение – дизъюнктор;
- логический элемент «НЕ» – инверсию – инвертор.



Поскольку любая логическая операция может быть представлена в виде комбинации трех основных, любые устройства компьютера, производящие обработку или хранение информации, могут быть собраны из базовых логических элементов, как из “кирпичиков”.

Логические элементы компьютера оперируют с сигналами, представляющими собой электрические импульсы. Есть импульс – логический смысл сигнала – 1, нет импульса – 0. На входы логического элемента поступают сигналы-значения аргументов, на выходе появляется сигнал-значение функции.

Преобразование сигнала логическим элементом задается таблицей состояний, которая фактически является таблицей истинности, соответствующей логической функции, только представлена в форме логических схем. В такой форме удобно изображать цепочки логических операций и производить их вычисления.

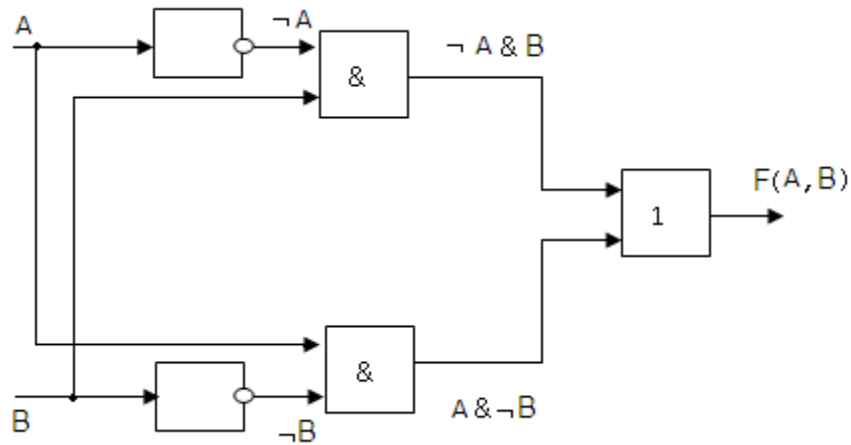
Алгоритм построения логических схем.

1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
4. Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

Пример. По заданной логической функции $F(A,B) = \neg A \& B \vee A \& \neg B$ построить логическую схему.

Решение.

1. Число логических переменных = 2 (A и B).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция).
Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).



Логические законы и правила преобразования логических выражений

Если две формулы A и B одновременно, то есть при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимают одинаковые значения, то они называются **равносильными**.

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений.

1. Закон двойного отрицания: $A = \neg(\neg A)$;
2. Переместительный (коммутативный) закон:
 - для логического сложения: $A \vee B = B \vee A$;
 - для логического умножения: $A \wedge B = B \wedge A$;
3. Сочетательный (ассоциативный) закон:
 - для логического сложения: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;
 - для логического умножения: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$;
4. Распределительный (дистрибутивный) закон:
 - для логического сложения: $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;
 - для логического умножения: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;
5. Законы де Моргана:
 - для логического сложения: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$;
 - для логического умножения: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;
6. Закон идемпотентности:
 - для логического сложения: $A \vee A = A$;
 - для логического умножения: $A \wedge A = A$;

7. Законы исключения констант:

- для логического сложения: $A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$;
- для логического умножения: $A \wedge 1 = A$, $A \wedge 0 = 0$;

8. Закон противоречия: $A \& \neg A = 0$;

9. Закон исключения третьего: $A \vee \neg A = 1$;

10. Закон поглощения:

- для логического сложения: $A \vee (A \wedge B) = A$;
- для логического умножения: $A \wedge (A \vee B) = A$;

11. Правило исключения импликации: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$;

12. Правило исключения эквиваленции: $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Справедливость этих законов можно доказать составив таблицу истинности выражений в правой и левой части и сравнив соответствующие значения.

Основываясь на законах, можно выполнять упрощение сложных логических выражений. Такой процесс замены сложной логической функции более простой, но равносильной ей, называется минимизацией функции.

Пример. Упростить логическое выражение $\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$.

Решение:

Согласно закону де Моргана:

$$\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B) \vee A = \neg A \& \neg B \& (A \& \neg B) \vee A$$

Согласно сочетательному закону:

$$\neg A \& \neg B \& (A \& \neg B) \vee A = \neg A \& A \& \neg B \& \neg B \vee A$$

Согласно закону противоречия и закону идемпотентности:

$$\neg A \& A \& \neg B \& \neg B \vee A = 0 \wedge \neg B \& \neg B = 0 \& \neg B \vee A$$

Согласно закону исключения 0:

$$0 \& \neg B = 0$$

Окончательно получаем

$$\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B) \vee A = 0 \vee A = A$$

Видеоурок по выполнению заданий практической работы

Задания

Вариант 1.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$(A \& B \& \bar{B}) \vee (B \& \bar{C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$A \& B \text{ и } \overline{\overline{A \vee B}}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $A \& ((\bar{B} \vee \bar{C}) \vee \bar{B} \& C) \vee \bar{A}$

б) $X \& Y \& Z \vee \overline{X \& Y \& Z} \vee X \& \bar{Y}$

Вариант 2.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$(B \& A \& \bar{C}) \vee (B \& \bar{A})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$B \& A \text{ и } \overline{B \vee \bar{A}}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $(A \vee C) \& (\bar{A} \vee B) \& (A \vee \bar{C})$

б) $\overline{(X \& \bar{Y} \vee Z)} \& Y \vee \bar{Z}$

Вариант 3.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$\overline{(A \& B)} \vee (B \& \bar{C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$A \vee B \text{ и } \overline{A \& \bar{B}}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $((X \vee Y) \& \bar{X}) \vee ((\overline{X \vee Y}) \& \bar{X})$

б) $(A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B) \vee \overline{A \& B}$

Вариант 4.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$(A \vee B) \vee (\overline{B \& C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$B \vee A \text{ и } \overline{B \& A}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $(\overline{A} \& B) \& (B \vee C) \& (A \vee (B \& C))$

б) $X \& Y \& Z \vee X \& Y \& \overline{Z} \vee \overline{X} \& Y \& Z$

Вариант 5.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$(B \& A) \vee (\overline{B \& C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$\overline{A} \& B \text{ и } \overline{A \vee B}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $(\overline{\overline{X \& Y} \vee \overline{X}}) \& (\overline{\overline{X \vee X} \& Y})$

б) $(A \vee C) \& (\overline{A} \vee B) \& (A \vee \overline{C})$

Вариант 6.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$(\overline{B \vee C}) \vee (\overline{A \& C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$B \& A \text{ и } \overline{B} \vee \overline{A}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $X \& Y \& Z \vee X \& \overline{Y} \& \overline{Z} \vee X \& \overline{Y}$

б) $A \& ((\overline{B} \vee \overline{C}) \vee \overline{B} \& C) \vee \overline{A}$

Вариант 7.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$A \& (B \& \overline{B \vee C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$A \vee \overline{B} \text{ и } \overline{A} \& \overline{B}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $(A \vee \overline{B}) \& (\overline{A \vee B}) \vee \overline{A \& B}$

б) $(X \vee Y \vee Z) \& (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$

Вариант 8.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$A \vee (C \& \overline{B \vee C})$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$\overline{B \vee A} \text{ и } \overline{\overline{B} \& \overline{A}}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $\overline{(X \& \overline{Y} \vee Z)} \& Y \vee \overline{Z}$

б) $(\overline{A} \& B) \& (B \vee C) \& (A \vee (B \& C))$

Вариант 9.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$C \& (\overline{A \vee B} \& B)$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$\overline{A \& B} \text{ и } A \vee B$$

3. Упростить логические выражения:

а) $X \& Y \& Z \vee X \& Y \& \overline{Z} \vee \overline{X} \& Y \& Z$

б) $(\overline{A} \& B) \& (B \vee C) \& (A \vee (B \& C))$

Вариант 10.

1. Постройте таблицу истинности для следующего логического выражения:

$$\bar{A} \& B \& (\bar{C} \vee A)$$

2. Установить, равносильны ли два высказывания:

$$B \& \bar{A} \text{ и } \overline{B \vee A}$$

3. Упростить логические выражения:

а) $(X \vee Y \vee Z) \& (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})$

б) $(\overline{\bar{X} \& \bar{Y} \vee \bar{X}}) \& (\overline{X \vee \bar{X} \& Y})$

Содержание отчета

1. Текст задания (с данными своего варианта).
2. Представление по каждому пункту задания подробного решения.

Технология выполнения работы

В данной работе необходимо составить таблицу истинности логического выражения, построить схему логической функции и упростить логическое выражение заданные каждому студенту в соответствии с его вариантом, записать ход рассуждений и полученные результаты.

Вопросы для защиты работы

1. Что такое высказывание (приведите пример)?
2. Что такое составное высказывание (приведите пример)?
3. Как называются и как обозначаются (в языке математики) следующие операции: ИЛИ, НЕ, И, ЕСЛИ ... ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ЛИБО ... ЛИБО?
4. Укажите приоритеты выполнения логических операций.
5. Составьте таблицу истинности для следующих операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.
6. Изобразите функциональные элементы: конъюнктор, дизъюнктор, инвертор.
7. Какие логические выражения называются равносильными?
8. Записать основные законы алгебры логики.